

## TD 32 : Permutations Indications

Dans tout ce TD,  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

### ————— Décomposition en produit de cycles —————

**1** ★ Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints et en déduire leur signature :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**2** ★★ Décomposer en produit de cycles à supports disjoints les permutations suivantes

$$\sigma = (1 \ 2) (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

$$\sigma' = (3 \ 4) (1 \ 2 \ 3 \ 4) (1 \ 2)$$

**3** ★★ On se place dans  $S_4$  et on pose  $\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ .

- 1) Décomposer  $\sigma^2$  en produit de cycles à supports disjoints. On remarquera que  $\sigma^2$  n'est pas un cycle. On dit que  $\sigma^2$  est une double transposition.
- 2) Combien y a-t-il d'éléments (distincts) dans  $S_4$  ? Les donner tous.

**4** ★★ (*Ordre d'une permutation*) Soit  $\sigma \in S_n$ . On définit l'ordre de  $\sigma$  comme étant le plus petit entier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\sigma^k = \text{id}$  (on admet qu'un tel  $k$  existe toujours).

- 1) On pose  $\sigma = (1 \ 3 \ 5 \ 2) \in \mathfrak{S}_5$ . Déterminer l'ordre de  $\sigma$ .
- 2) Quel est l'ordre d'une transposition ? D'un 3-cycle ?
- 3) Quel est l'ordre d'un  $p$ -cycle ?
- 4) Quel est l'ordre de  $\sigma = (1 \ 2) (3 \ 4 \ 5)$  ?
- 5) Soit  $p$  et  $q$  des entiers premiers entre eux supérieurs ou égaux à 2. Soit  $c_p$  et  $c_q$  deux cycles de longueurs respectives  $p$  et  $q$ , à supports disjoints. On pose  $\sigma = c_p c_q$ . Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \sigma^m = \text{id} \iff pq \mid m$$

En déduire l'ordre de  $\sigma$ .

1) Attention, il ne suffit pas de trouver un entier  $k$  qui vérifie  $\sigma^k = \text{id}$ . Il faut aussi vérifier que pour tout  $k' \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ , on a  $\sigma^{k'} \neq \text{id}$ .

**5** ★★★ Dans  $S_n$ , soit  $c = (a_1 \ \cdots \ a_p)$  un  $p$ -cycle et  $\sigma \in S_n$ . Montrer que  $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$  est un  $p$ -cycle. Préciser les valeurs  $b_1, \dots, b_p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  telles que  $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (b_1 \ \cdots \ b_p)$ .

Pour trouver  $b_1, \dots, b_p$ , prendre des exemples !

### ————— Signature d'une permutation —————

**6** ★ Montrer que pour tous  $\sigma, \tau \in S_n$ , les permutations  $\tau$  et  $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$  ont la même parité.

**7** ★★ Dans  $S_n$ , est-ce qu'il existe une permutation  $\sigma$  telle que  $\sigma^2 = (1 \ 2)$  ?

**8** ★★ On note  $A_n$  l'ensemble des permutation paires de  $S_n$ .

- 1) Justifier que  $(A_n, \circ)$  est un groupe. On l'appelle le groupe alterné de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .
- 2) Quelles sont les permutations de  $A_3$  ? et de  $A_4$  ?
- 3) Montrer que les doubles transpositions de  $A_4$  peuvent chacune s'écrire comme un produit de deux 3-cycles.
- 4) En déduire que toute permutation paire de  $S_n$  peut se décomposer en un produit de 3-cycles.

4 Utiliser la décomposition en produit de transpositions. Attention, la question 3) ne permet pas de conclure immédiatement. Il y a plusieurs arguments nécessaires, faites preuve de rigueur !

**9** ★★★ On reprend la définition de l'ordre d'une permutation définie précédemment. Soit  $\sigma \in S_{10}$  d'ordre 14.

- 1) Donner un exemple d'une telle permutation.
- 2) Montrer que  $\sigma$  est nécessairement impaire, puis déterminer le nombre de permutations d'ordre 14 de  $\mathfrak{S}_{10}$ .

- 1) Utiliser le résultat de l'exercice 4 où l'ordre d'une permutation a été défini.
- 2) Montrer que  $\sigma$  est nécessairement sous la forme de la permutation trouvée à la question 1.